Semana da Pura 2024
Minicurso “Uma Introdução à Integral de Kurzweil-Henstock”

Vinícius Morelli Cortes

18 de abril de 2024

1 Introdução

Dada $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a, b]$, sob que condições podemos garantir que

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)?$$

Naturalmente, a resposta para esta pergunta depende da noção de integração com a qual estamos trabalhando.

No caso da integral de Riemann, é suficiente exigir que F' seja Riemann-integrável em $[a, b]$. Esta hipótese é essencial - basta considerar uma função derivável cuja derivada não é limitada, como, por exemplo, $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\pi/x^2\right), & \text{se } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Com um pouco mais de trabalho, é possível construir uma função derivável cuja derivada é limitada mas não é Riemann-integrável (veja [3, pg. 35]).

Por outro lado, toda derivada é automaticamente Lebesgue-mensurável, de modo que, no caso da integral de Lebesgue, basta supor que F' seja limitada. É claro que tal hipótese também é essencial.

Esta discussão motivou matemáticos a buscarem, no começo do século XX, uma noção de integral mais abrangente com respeito a qual *toda* derivada fosse automaticamente integrável e verificasse a igualdade $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$. Arnaud Denjoy, em 1912, e Oskar Perron, em 1914, foram bem-sucedidos nessa empreitada e, embora tenham empregado abordagens muito diferentes, obtiveram duas noções equivalentes de integral.

No final da década de 1950, Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock introduziram, de maneira independente, uma nova noção de integral fazendo uma ligeira modificação na definição original de Riemann. Surpreendentemente, esta integral também é equivalente às integrais de Denjoy e Perron - com a vantagem de que a abordagem de Kurzweil e Henstock é muito mais simples - e engloba todas as derivadas, todas as funções Lebesgue-integráveis e todas as integrais impróprias de Riemann.

O objetivo deste minicurso é introduzir a integral de Kurzweil-Henstock e apresentar brevemente algumas de suas propriedades básicas, comparando-a com a integral de Riemann usual. Vamos admitir que o leitor esteja familiarizado com as propriedades da integral de Riemann. Além disso, vamos nos dedicar apenas a integrais sobre intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$; as extensões para intervalos ilimitados podem ser encontradas, por exemplo, em [1].

Em alguns momentos, no decorrer do texto, será conveniente interpretar a soma sobre um conjunto vazio de índices como sendo zero.

2 Definição e primeiros exemplos

As duas definições a seguir são necessárias para introduzir as integrais de Riemann e de Kurzweil-Henstock e serão usadas por todo o texto.

Definição 1. Uma *partição* do intervalo $[a,b]$ é uma coleção finita $P = \{I_j : 1 \le j \le n\}$ de intervalos fechados contidos em $[a,b]$, onde $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ e $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Um *rótulo de I_j* é um número real $t_j \in I_j$. Se $t_1, \ldots, t_n$ são rótulos de $I_1, \ldots, I_n$, respectivamente, dizemos que a coleção $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma *partição rotulada de* $[a,b]$.

Definição 2. Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ uma partição rotulada de $[a,b]$, a *soma de Riemann de f com respeito a $\dot{P}$* é o número real

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Recordamos a definição de integral de Riemann.

Definição 3. Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é *Riemann-integrável em* $[a,b]$ se existe um número real A com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que se $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma partição rotulada de $[a,b]$ satisfazendo $\max\limits_{1 \le j \le n}(x_j - x_{j-1}) \le \delta_\varepsilon$, então $|S(f;\dot{P}) - A| \le \varepsilon$. Neste caso, dizemos que A é a *integral de Riemann de f em* $[a,b]$.

Os outros ingredientes da integral de Kurzweil-Henstock são os conceitos a seguir.

Definição 4. Um *calibre em* $[a,b]$ é uma função $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$. Dizemos que uma partição rotulada $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ de $[a,b]$ é *δ-fina* se $I_j \subset [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$, isto é, se

$$t_j - \delta(t_j) \le x_{j-1} \le t_j \le x_j \le t_j + \delta(t_j)$$

para todo $1 \le j \le n$.

Observação 5. (a) Se $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ é δ-fina, então $x_j - x_{j-1} \le 2\delta(t_j)$ para todo $1 \le j \le n$.

(b) Dado $\delta_0 > 0$, a função $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ dada por $\delta(x) = \delta_0$ para todo $x \in [a,b]$ é um calibre em $[a,b]$. Se $\dot{P}$ é δ-fina, então o diâmetro de $\dot{P}$ é menor ou igual a $2\delta_0$.

(c) Se δ_1 e δ_2 são dois calibres em $[a,b]$, então $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ também é um calibre em $[a,b]$. É claro que $\dot{P}$ é δ-fina se, e somente se, $\dot{P}$ é δ_1-fina e δ_2-fina.

(d) Dados δ um calibre em $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, se $\dot{P}_1$ e $\dot{P}_2$ são partições δ-finas de $[a,c]$ e de $[c,b]$, respectivamente, então $\dot{P} = \dot{P}_1 \cup \dot{P}_2$ é uma partição δ-fina de $[a,b]$.

(e) Dados $c \in (a,b)$ e δ_1, δ_2 calibres em $[a,c]$ e em $[c,b]$, respectivamente, consideremos o calibre δ em $[a,b]$ dado por

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left(\delta_1(x), \frac{c-x}{2}\right), & \text{se } a \le x < c, \\ \min\left(\delta_1(c), \delta_2(c)\right), & \text{se } x = c, \\ \min\left(\delta_2(x), \frac{x-c}{2}\right), & \text{se } c < x \le b. \end{cases}$$

Se $\dot{P}$ é δ-fina, então c é o rótulo de todo intervalo de $\dot{P}$ que o contém. De fato, se $c \in I_j$, então $|c - t_j| \le \delta(t_j)$, de modo que $t_j = c$.

(f) Sejam δ um calibre em $[a,b]$ e $\dot{P}$ uma partição δ-fina de $[a,b]$. Se t_j não é um extremo de I_j, seja $\dot{Q}$ a partição rotulada obtida substituindo I_j pelos intervalos $[x_{j-1}, t_j]$ e $[t_j, x_j]$, ambos rotulados por t_j, e mantendo os outros intervalos e rótulos de $\dot{P}$. É claro que $\dot{Q}$ também é δ-fina e satisfaz $S(f;\dot{Q}) = S(f;\dot{P})$ para toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Deste modo, *podemos supor, quando for conveniente, que os rótulos de uma partição δ-fina são extremos dos intervalos a que pertencem.*

O primeiro resultado desta seção, devido a Pierre Cousin, assegura que todo calibre δ admite uma partição δ-fina. Esta observação será crucial para a definição da integral de Kurzweil-Henstock.

Teorema 6 (Teorema de Cousin)**.** *Se δ é um calibre em $[a,b]$, então existe uma partição δ-fina de $[a,b]$.*

Demonstração. Seja $I = \{t \in [a,b] : \text{existe uma partição } \delta\text{-fina do intervalo } [a,t]\}$. Notemos que $a \in I$, pois $\{(\{a\},a)\}$ é uma partição δ-fina de $\{a\}$, e que I é limitado superiormente por b. Seja, então, $s = \sup I$. Vamos mostrar que $s \in I$ e que $s = b$.

Em virtude da definição de supremo, existe $t \in I$ tal que $s - \delta(s) < t \le s$. Como $t \in I$, existe $\dot{P}$ uma partição δ-fina de $[a,t]$. Então $\dot{Q} = \dot{P} \cup \{([t,s],s)\}$ é uma partição δ-fina de $[a,s]$ e, portanto, $s \in I$.

Agora, suponhamos, por absurdo, que $s < b$. Sejam $c = \min(s+\delta(s), b)$ e $\dot{P}$ uma partição δ-fina de $[a,s]$. Então $\dot{Q} = \dot{P} \cup \{([s,c],s)\}$ é uma partição δ-fina de $[a,c]$, de modo que $c \in I$ e $s < c$; um absurdo. □

Estamos, agora, em condições de introduzir a integral de Kurzweil-Henstock.

Definição 7. Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é *Kurzweil-Henstock-integrável em* $[a,b]$ se existe um número real A com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe um calibre δ_ε em $[a,b]$ tal que se $\dot{P}$ é uma partição δ_ε-fina de $[a,b]$, então $|S(f;\dot{P}) - A| \le \varepsilon$.

Proposição 8. *Se existe um número real A satisfazendo as condições da Definição 7, ele é único.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 dois números reais satisfazendo as condições da Definição 7 para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existem calibres δ_1 e δ_2 em $[a,b]$ tais que se $\dot{P}$ é uma partição δ_i-fina de $[a,b]$, então $|S(f;\dot{P}) - A_i| \le \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $1 \le i \le 2$. Se $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ e $\dot{P}$ é uma partição δ-fina de $[a,b]$, então

$$|A_1 - A_2| \le |S(f;\dot{P}) - A_1| + |S(f;\dot{P}) - A_2| \le \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $A_1 = A_2$. □

Em virtude da Proposição 8, o número real A satisfazendo as condições da Definição 7 é chamado de *integral de Kurzweil-Henstock de f* e denotado por $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$, quando for conveniente explicitar a variável.

De agora em diante, escreveremos simplesmente "f é integrável" ao invés de "f é Kurzweil-Henstock-integrável" e "integral de f" ao invés de "integral de Kurzweil-Henstock de f".

Vamos mostrar que esta nova integral recupera a integral de Riemann, no sentido de que toda função Riemann-integrável também é integrável, com integrais iguais. A próxima proposição apresenta uma reformulação da Definição 7 que tornará mais clara a relação entre as duas integrais.

Proposição 9. *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função, são equivalentes:*

(i) f é integrável em $[a,b]$.

(ii) Existe um número real B com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe um calibre δ_ε em $[a,b]$ tal que se $\dot{P} = \{(I_j,t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma partição rotulada de $[a,b]$ satisfazendo $x_j - x_{j-1} \le \delta_\varepsilon(t_j)$ para todo $1 \le j \le n$, então $|S(f;\dot{P}) - B| \le \varepsilon$.

Nestas condições, temos $B = \int_a^b f$.

Demonstração. *(i) $\Longrightarrow$ (ii)* Suponhamos que f seja integrável em $[a,b]$ e seja $B = \int_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ como na Definição 7. Se $\dot{P} = \{(I_j,t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma partição rotulada de $[a,b]$ satisfazendo $x_j - x_{j-1} \le \delta_\varepsilon(t_j)$ para todo $1 \le j \le n$, então temos

$$t_j - \delta_\varepsilon(t_j) \le x_j - \delta_\varepsilon(t_j) \le x_{j-1} \le x_j \le x_{j-1} + \delta_\varepsilon(t_j) \le t_j + \delta_\varepsilon(t_j)$$

para todo $1 \le j \le n$, isto é, $\dot{P}$ é δ_ε-fina. Consequentemente, $|S(f;\dot{P}) - B| \le \varepsilon$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* Reciprocamente, seja B um número real como no item *(ii)*. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ como no item *(ii)*. Se $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma partição $\delta_\varepsilon/2$-fina de $[a,b]$, então $x_j - x_{j-1} \le \delta_\varepsilon(t_j)$ para todo $1 \le j \le n$ e, portanto, $|S(f;\dot{P}) - B| \le \varepsilon$. Isto prova que f é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = B$. □

Corolário 10. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$, com integrais iguais.*

Demonstração. Basta notar que se f é Riemann-integrável em $[a,b]$, então f satisfaz as condições do item *(ii)* da proposição anterior tomando B como sua integral de Riemann e δ_ε um calibre constante em $[a,b]$. □

Encerramos esta seção com dois exemplos simples de funções integráveis que não são Riemann-integráveis.

Exemplo 11 (Função de Dirichlet)**.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $(r_k)_{k\ge1}$ uma enumeração de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o calibre δ_ε em $[0,1]$ dado por

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon/2^{k+2}, & \text{se } x = r_k \text{ para algum } k \ge 1, \\ 1, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ uma partição δ_ε-fina de $[0,1]$. Se $t_j \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, então $f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = 0$. Por outro lado, se $t_j = r_k$ para algum $k \ge 1$, então $f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = x_j - x_{j-1} \le 2\delta_\varepsilon(t_j) = \varepsilon/2^{k+1}$. Como cada t_j é rótulo de, no máximo, dois intervalos distintos de $\dot{P}$, concluímos que

$$|S(f;\dot{P})| \le 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Consequentemente, f é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

Exemplo 12 (Uma modificação da Função de Thomae)**.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} q, & \text{se } x = p/q, \text{onde } p, q \in \mathbb{N} \text{ e } \operatorname{mdc}(p,q) = 1, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $(r_k)_{k\ge1} = (p_k/q_k)_{k\ge1}$ uma enumeração de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o calibre δ_ε em $[0,1]$ dado por

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon/q_k 2^{k+2}, & \text{se } x = r_k \text{ para algum } k \ge 1, \\ 1, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Argumentando como no exemplo anterior, concluímos que f é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

Convém observar que f é *ilimitada* em todo intervalo de interior não vazio contido em $[0,1]$ e, em particular, *não é contínua em nenhum ponto.* De fato, consideremos, para cada $m \ge 1$, o conjunto $F_m = \{x = p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q} :\ p, q \in \mathbb{N}, q \le m \text{ e } \operatorname{mdc}(p,q) = 1\}$. Se $x = p/q \in F_m$, então $x \le 1$ e $q \le m$, de modo que $p \le m$. Isto prova que F_m é finito (pois possui, no máximo, m^2 elementos) e, portanto, $\mathbb{Q} \setminus F_m$ é denso em $\mathbb{R}$. Se I é um intervalo de interior não vazio contido em $[0,1]$, para todo $m \ge 1$ existe $x_m = p/q \in I \cap (\mathbb{Q} \setminus F_m)$, de modo que $f(x_m) = q \ge m$. Logo, f é ilimitada em I.

Fazendo uma modificação simples dos argumentos usados nos dois exemplos acima, é fácil mostrar que toda função que se anula no complementar de um subconjunto enumerável de $[a,b]$ é integrável em $[a,b]$, com integral nula. Este resultado será fortalecido na Proposição 18.

3 Propriedades da integral

A primeira proposicão desta seção reúne as propriedades algébricas básicas da integral. As demonstrações são muito semelhantes aos resultados análogos para a integral de Riemann.

Proposição 13. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então temos:*

(i) $f+g$ *é integrável em* $[a,b]$ *e* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(ii) αf *é integrável em* $[a,b]$ *e* $\displaystyle\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$.

(iii) Se $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

(iv) Se $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(v) Se $|f|$ *também é integrável em* $[a,b]$, *então* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Demonstração. *(i)* Dado $\varepsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 dois calibres em $[a,b]$ tais que

$$\dot{P}_1 \text{ é uma partição } \delta_1\text{-fina de } [a,b] \implies \left|S(f;\dot{P}_1) - \int_a^b f\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\dot{P}_2 \text{ é uma partição } \delta_2\text{-fina de } [a,b] \implies \left|S(g;\dot{P}_2) - \int_a^b g\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e $\dot{P}$ é uma partição δ-fina de $[a,b]$, então

$$\left|S(f+g;\dot{P}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| \leq \left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| + \left|S(g;\dot{P}) - \int_a^b g\right| \leq \varepsilon,$$

pois $\dot{P}$ é δ_1-fina e δ_2-fina.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ tal que

$$\dot{P} \text{ é uma partição } \delta_\varepsilon\text{-fina de } [a,b] \implies \left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|+1}.$$

Para uma tal partição, temos

$$\left|S(\alpha f;\dot{P}) - \alpha\int_a^b f\right| = |\alpha|\left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon\frac{|\alpha|}{|\alpha|+1} < \varepsilon.$$

(iii) Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre de $[a,b]$ como na Definição 7. Se $\dot{P}$ é uma partição δ_ε-fina de $[a,b]$, então

$$\left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon \implies \int_a^b f - S(f;\dot{P}) \geq -\varepsilon \implies \int_a^b f \geq \underbrace{S(f;\dot{P})}_{\geq 0} - \varepsilon \geq -\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

(iv) Em virtude de *(i)* e de *(ii)*, a função $h = g - f$ é integrável em $[a,b]$ e, como $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, o item *(iii)* assegura que

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b h \geq 0 \implies \int_a^b g \geq \int_a^b f.$$

(v) Basta notar que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ e aplicar o item *(iv)*. □

Convém observar que, em contraste com o caso das integrais de Riemann e de Lebesgue, a integrabilidade de $|f|$ não é consequência da integrabilidade de f (veja os Exemplos 24 e 40).

O próximo resultado fornece uma caracterização útil de integrabilidade que não depende de um candidato ao valor da integral. Sua demonstração é, novamente, análoga à do contexto clássico.

Teorema 14 (Critério de Cauchy)**.** *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um calibre δ_ε em $[a,b]$ tal que se $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ são duas partições δ_ε-finas de $[a,b]$, então $|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| \le \varepsilon$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que f seja integrável em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ tal que

$$\dot{P} \text{ é uma partição } \delta_\varepsilon\text{-fina de } [a,b] \implies \left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ são duas tais partições, é claro que $|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| \le \varepsilon$.

Reciprocamente, para cada $n \ge 1$, seja δ_n um calibre em $[a,b]$ tal que

$$\dot{P} \text{ e } \dot{Q} \text{ são duas partições } \delta_n\text{-finas de } [a,b] \implies |S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| \le \frac{1}{n}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\delta_{n+1}(x) \le \delta_n(x)$ para todo $x \in [a,b]$ e todo $n \ge 1$. Fixemos $\dot{P}_n$ uma partição δ_n-fina de $[a,b]$. Se $m > n \ge 1$, então $\dot{P}_m$ e $\dot{P}_n$ são δ_n-finas, de modo que

$$|S(f;\dot{P}_m) - S(f;\dot{P}_n)| \le \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Isto prova que a sequência $(S(f;\dot{P}_n))_{n\ge1}$ é de Cauchy e, portanto, converge para algum número real A. Afirmamos que A satisfaz as condições da Definição 7. Fixando $n \ge 1$ e fazendo $m \longrightarrow +\infty$ em (1), obtemos

$$|S(f;\dot{P}_n) - A| \le \frac{1}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \ge 1$ tal que $1/N \le \varepsilon/2$. Se $\dot{P}$ é uma partição δ_N-fina de $[a,b]$, então

$$|S(f;\dot{P}) - A| \le |S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{P}_N)| + |S(f;\dot{P}_N) - A| \le \frac{2}{N} \le \varepsilon.$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = A.$ □

Vamos estabelecer, agora, a aditividade da integral. A estratégia da demonstração de uma das implicações é construir um calibre δ de tal modo que o ponto de divisão do intervalo seja rótulo de qualquer partição δ-fina de $[a,b]$.

Teorema 15. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in (a,b)$. Então f é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Neste caso, temos $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que f seja integrável em $[a,b]$. Vamos mostrar que f também é integrável em $[a,c]$ usando o Critério de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ um calibre em $[a,b]$ como no enunciado do Critério de Cauchy. Sejam δ_1 e δ_2 as restrições de δ aos intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$, e seja $\dot{R}$ uma partição δ_2-fina fixada de $[c,b]$. Se $\dot{Q}_1$ e $\dot{Q}_2$ são duas partições δ_1-finas de $[a,c]$, então $\dot{P}_1 = \dot{Q}_1 \cup \dot{R}$ e $\dot{P}_2 = \dot{Q}_2 \cup \dot{R}$ são partições δ-finas de $[a,b]$. Consequentemente,

$$|S(f;\dot{Q}_1) - S(f;\dot{Q}_2)| = |S(f;\dot{Q}_1) \pm S(f;\dot{R}) - S(f;\dot{Q}_2)| = |S(f;\dot{P}_1) - S(f;\dot{P}_2)| \le \varepsilon,$$

e o Critério de Cauchy assegura que f é integrável em $[a,c]$. Argumentando de maneira análoga, provamos que f também é integrável em $[c,b]$.

Reciprocamente, suponhamos que f seja integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 calibres em $[a,c]$ e em $[c,b]$, respectivamente, tais que

$$\dot{P}_1 \text{ é uma partição } \delta_1\text{-fina de } [a,c] \implies \left| S(f;\dot{P}_1) - \int_a^c f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\dot{P}_2 \text{ é uma partição } \delta_2\text{-fina de } [c,b] \implies \left| S(f;\dot{P}_2) - \int_c^b f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos o calibre δ em $[a,b]$ dado por

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left(\delta_1(x), \frac{c-x}{2}\right), & \text{se } a \leq x < c, \\ \min\left(\delta_1(c), \delta_2(c)\right), & \text{se } x = c, \\ \min\left(\delta_2(x), \frac{x-c}{2}\right), & \text{se } c < x \leq b. \end{cases}$$

Seja $\dot{P}$ uma partição δ-fina de $[a,b]$. Como c é o rótulo de todo intervalo de $\dot{P}$ que o contém, podemos supor, sem perda de generalidade, que c seja extremo de dois intervalos consecutivos de $\dot{P}$. Sejam $\dot{P}_1$ e $\dot{P}_2$ as partições formadas pelos intervalos de $\dot{P}$ contidos em $[a,c]$ e em $[c,b]$, respectivamente, com os mesmos rótulos de $\dot{P}$. Como $\dot{P}_1$ é δ_1-fina e $\dot{P}_2$ é δ_2-fina, temos

$$\left| S(f;\dot{P}) - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) \right| \leq \left| S(f;\dot{P}_1) - \int_a^c f \right| + \left| S(f;\dot{P}_2) - \int_c^b f \right| \leq \varepsilon.$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, como queríamos. □

Corolário 16. *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, é integrável em $[c,d]$ para todos $a \leq c < d \leq b$.*

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,b]$, é conveniente definir $\int_b^a f = -\int_a^b f$ e $\int_a^a f = 0$. Com esta definição, é fácil verificar que $\int_A^B f = \int_A^C f + \int_C^B f$ para todos $A, B, C \in [a,b]$.

O último resultado desta seção generaliza os dois exemplos da seção anterior. Para enunciá-lo, vamos introduzir o conceito de *conjunto de medida nula*. Se I é um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$, seu comprimento será denotado por $\ell(I)$.

Definição 17. Dizemos que um subconjunto E de $\mathbb{R}$ *tem medida nula* se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma sequência de intervalos abertos $(J_k)_{k\geq 1}$ tais que $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \varepsilon$.

Não é difícil provar que todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ tem medida nula, que uma reunião enumerável de subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}$ também tem medida nula, e que um subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula.

Proposição 18. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função tal que o conjunto $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ tem medida nula, então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = 0$.*

Demonstração. A ideia da demonstração é construir, a partir do fato de E ter medida nula, um calibre apropriado em $[a,b]$. Para cada $m \geq 1$, seja $E_m = \{x \in [a,b] : m-1 < |f(x)| \leq m\}$. É claro que E é a reunião disjunta da sequência $(E_m)_{m\geq 1}$. Dado $\varepsilon > 0$, como cada E_m tem medida nula, existe uma sequência de intervalos abertos $(J_k^m)_{k\geq 1}$ tal que

$$E_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^m \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k^m) \leq \frac{\varepsilon}{m 2^m}.$$

Dado $x \in E$, seja $m(x)$ o único número natural tal que $x \in E_{m(x)}$, seja $k(x)$ o menor número natural $x \in J_{k(x)}^{m(x)}$, e seja $\delta_\varepsilon(x) > 0$ tal que $[x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)] \subset J_{k(x)}^{m(x)}$. Definindo $\delta_\varepsilon(x) = 1$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$, obtemos um calibre δ_ε em $[a,b]$.

Seja $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ uma partição δ_ε-fina de $[a,b]$. Como dois intervalos de $\dot{P}$ compartilham, no máximo, um único ponto, para cada $m, k \ge 1$, a soma dos comprimentos dos intervalos de $\dot{P}$ contidos em J_k^m é menor ou igual ao comprimento de J_k^m. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
|S(f;\dot{P})| &= \left| \sum_{t_j \notin E} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t_j \in E_m} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&\le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t_j \in E_m} \underbrace{|f(t_j)|}_{\le m} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=\ell(I_j)} \le \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{t_j \in E_m} \ell(I_j) \\
&\le \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=k(t_j)} \ell(J_k^m) \le \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k^m) \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = 0$. □

Corolário 19. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são duas funções tais que f é integrável em $[a,b]$ e o conjunto $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula, então g também é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, a função $h = g - f$ é integrável em $[a,b]$ e sua integral é igual a zero. Como f é integrável em $[a,b]$ e $g = h + f$, g também é integrável em $[a,b]$ e sua integral coincide com a de f. □

4 O Teorema Fundamental do Cálculo

Esta seção é dedicada ao Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Kurzweil-Henstock. Veremos que a hipótese de integrabilidade de F' se torna parte da conclusão do 1° Teorema Fundamental do Cálculo, e que toda função dada por uma integral é automaticamente derivável no complementar de um subconjunto de medida nula de seu domínio.

No caso da integral de Riemann, o ingrediente principal de uma das demonstrações do 1° Teorema Fundamental do Cálculo é o Teorema do Valor Médio. O lema a seguir é uma consequência imediata da definição de derivada e cumprirá um papel análogo ao do Teorema do Valor Médio no contexto da integral de Kurzweil-Henstock.

Lema 20. *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $x_0 \in [a,b]$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$ tal que se $u, v \in [a,b]$ satisfazem*

$$x_0 - \delta_\varepsilon(x_0) \le u \le x_0 \le v \le x_0 + \delta_\varepsilon(x_0),$$

então

$$|F(v) - F(u) - F'(x_0)(v - u)| \le \varepsilon(v - u).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de derivada existe $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$ tal que

$$x \in [a,b], 0 < |x - x_0| \le \delta_\varepsilon(x_0) \implies \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - F'(x_0) \right| \le \varepsilon.$$

Consequentemente, temos

$$x \in [a,b], |x - x_0| \le \delta_\varepsilon(x_0) \implies |F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)| \le \varepsilon |x - x_0|.$$

Se $u, v \in [a,b]$ são tais que $x_0 - \delta_\varepsilon(x_0) \le u \le x_0 \le v \le x_0 + \delta_\varepsilon(x_0)$, então

$$\begin{aligned}
|F(v) - F(u) - F'(x_0)(v-u)| &= |F(v) \pm F(x_0) - F(u) - F'(x_0)(v \pm x_0 - u)| \\
&\le |F(v) - F(x_0) - F'(x_0)(v - x_0)| + |F(u) - F(x_0) - F'(x_0)(u - x_0)| \\
&\le \varepsilon(v - x_0) + \varepsilon(x_0 - u) = \varepsilon(v-u),
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Teorema 21 (1° Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Sejam $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções tais que:*

(i) F é contínua em $[a,b]$.

(ii) Existe um subconjunto enumerável E de $[a,b]$ tal que F é derivável em x e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$.

Então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Demonstração. Vamos usar a continuidade de F em E e o Lema 20 para construir um calibre adequado em $[a,b]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que E seja infinito e fixar uma enumeração $(e_k)_{k\ge1}$ de E. Podemos supor também, em virtude do Corolário 19, que $f(e_k) = 0$ para todo $k \ge 1$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Se $x \in [a,b] \setminus E$, de acordo com o Lema 20 existe $\delta_\varepsilon(x) > 0$ tal que se $u, v \in [a,b]$ e $x - \delta_\varepsilon(x) \le u \le x \le v \le x + \delta_\varepsilon(x)$, então

$$|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(v-u).$$

Para cada $k \ge 1$, como F é contínua em e_k, existe $\delta_\varepsilon(e_k) > 0$ tal que

$$t \in [a,b], |t - e_k| \le \delta_\varepsilon(e_k) \implies |F(t) - F(e_k)| \le \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}.$$

Isto define um calibre δ_ε em $[a,b]$. Seja $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ uma partição δ_ε-fina de $[a,b]$. Se $t_j \in [a,b] \setminus E$, então

$$|F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(t_j)(x_j - x_{j-1})| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_j - x_{j-1}).$$

Por outro lado, se $t_j = e_k$ para algum $k \ge 1$, então

$$|F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(t_j)(x_j - x_{j-1})| = |F(x_j) - F(x_{j-1})| \le |F(x_j) - F(e_k)| + |F(e_k) - F(x_{j-1})| \le \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Como cada t_j é rótulo de, no máximo, dois intervalos distintos de $\dot{P}$, obtemos

$$\begin{aligned}
|S(f;\dot{P}) - (F(b) - F(a))| &= \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) \right| \\
&\le \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(t_j)(x_j - x_{j-1})| \\
&= \sum_{t_j \notin E} |F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(t_j)(x_j - x_{j-1})| \\
&+ \sum_{k=1}^\infty \sum_{t_j = e_k} |F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(t_j)(x_j - x_{j-1})| \\
&\le \sum_{1 \le j \le n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_j - x_{j-1}) + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Exemplo 22. Sejam $F, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $F(x) = 2\sqrt{x}$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como F é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (0,1]$, o 1° Teorema Fundamental do Cálculo assegura que f é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = F(1) - F(0) = 2$. Notemos que este resultado coincide com a integral imprópria de f em $[0,1]$.

Exemplo 23. Sejam $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $F(x) = \ln x$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

F é derivável em $(0,1]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (0,1]$, mas F não admite extensão contínua a $[0,1]$. O 1° Teorema Fundamental do Cálculo não se aplica neste caso e, de fato, f não é integrável em $[0,1]$. Caso contrário, para cada $k \geq 1$ teríamos

$$\int_0^1 f = \int_0^{1/k} f + \int_{1/k}^1 f \geq \int_{1/k}^1 f = \ln(1) - \ln(1/k) = \ln k \longrightarrow +\infty,$$

um absurdo.

Decorre dos dois exemplos anteriores que o quadrado de uma função integrável não é, em geral, integrável, diferentemente do que ocorre com as integrais de Riemann e de Lebesgue.

Exemplo 24. Sejam $F, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\pi/x^2\right), & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\pi/x^2\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\pi/x^2\right), & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como F é derivável em $[0,1]$ e $F' = f$, o 1º Teorema Fundamental do Cálculo assegura que f é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f = F(1) - F(0) = -1$. No entanto, $|f|$ não é integrável em $[0,1]$. Caso contrário, escrevendo $I_k = \left[\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$ para cada $k \geq 1$, teríamos

$$\int_0^1 |f| \geq \sum_{k=1}^m \int_{I_k} |f| \geq \sum_{k=1}^m \left|\int_{I_k} f\right| = \sum_{k=1}^m \left|F\left(\tfrac{1}{\sqrt{k}}\right) - F\left(\tfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right| = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \longrightarrow +\infty,$$

um absurdo.

Vamos estudar, a seguir, o comportamento de uma função dada por uma integral. Por conveniência, vamos lidar somente com o caso em que o extremo inferior de integração é o extremo esquerdo do domínio do integrando; os outros casos podem ser analisados de maneira análoga usando o comentário imediatamente posterior ao Corolário 16. Nosso primeiro passo é provar que, assim como no caso da integral de Riemann, uma função dada por uma integral é derivável em todo ponto em que o integrando é contínuo.

Teorema 25. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ e seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Dado $c \in [a,b)$, se o limite lateral $\displaystyle\lim_{x \to c^+} f(x)$ existe e é igual a $A \in \mathbb{R}$, então F admite derivada lateral à direita em c e $F'_+(c) = A$. Dado $d \in (c,b]$, se o limite lateral $\displaystyle\lim_{x \to d^-} f(x)$ existe e é igual a $B \in \mathbb{R}$, então F admite derivada lateral à esquerda em d e $F'_-(d) = B$.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para limites laterais à direita; o outro caso é análogo. Seja $c \in [a,b)$ tal que $\lim_{x\to c^+} f(x) = A$; em virtude do Corolário 19, podemos supor que $f(c) = A$. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in [a,b], c \le x \le c+\delta \implies |f(x) - A| \le \varepsilon \implies A - \varepsilon \le f(x) \le A + \varepsilon.$$

Se $x \in [a,b]$ e $c < x \le c+\delta$, então

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_c^x f$$

e, como

$$(A-\varepsilon)(x-c) = \int_c^x (A-\varepsilon) \le \int_c^x f \le \int_c^x (A+\varepsilon) = (A+\varepsilon)(x-c),$$

concluímos que

$$A - \varepsilon \le \frac{F(x) - F(c)}{x-c} \le A + \varepsilon \implies \left| \frac{F(x) - F(c)}{x-c} - A \right| \le \varepsilon.$$

Isto prova que $F'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \dfrac{F(x) - F(c)}{x-c} = A$. □

Corolário 26. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ e seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$. Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.*

Também como no caso da integral de Riemann, toda função dada por uma integral é contínua. A demonstração deste fato é fácil quando o integrando é limitado, o que é automaticamente verdadeiro para a integral de Riemann. Para provar o caso geral, vamos precisar de um importante resultado devido a Stanisław Saks e Ralph Henstock que será usado várias vezes no que se segue.

Definição 27. Uma *subpartição* (respectivamente, *subpartição rotulada*) *de* $[a,b]$ é um subconjunto de uma partição (respectivamente, partição rotulada) de $[a,b]$. Analogamente, se δ é um calibre em $[a,b]$, uma *subpartição δ-fina de* $[a,b]$ é um subconjunto de uma partição δ-fina de $[a,b]$. Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $\dot{P} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ uma subpartição rotulada de $[a,b]$, a *soma de Riemann de f com respeito a $\dot{P}$* é o número real

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Se f é integrável em cada I_j, escreveremos $\int_{U(\dot{P})} f = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f$, onde $U(\dot{P}) = \bigcup_{j=1}^n I_j$.

Essencialmente, o Lema de Saks-Henstock afirma que a soma de Riemann de uma função integrável f com respeito a uma partição $\dot{P}$ aproxima a integral de f com a mesma precisão que a soma de Riemann de f com respeito a uma *subpartição de $\dot{P}$* aproxima a soma das integrais de f sobre os intervalos que formam a subpartição.

Lema 28 (Lema de Saks-Henstock)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ tal que se $\dot{P}$ é uma partição δ_ε-fina de $[a,b]$, então $\left|S(f;\dot{P}) - \int_a^b f\right| \le \varepsilon$. Se $\dot{Q} = \{(I_j, t_j) : 1 \le j \le n\}$ é uma subpartição δ_ε-fina qualquer de $[a,b]$, então temos:*

(i) $\left|S(f;\dot{Q}) - \int_{U(\dot{Q})} f\right| = \left|\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f\right| \le \varepsilon.$

(ii) $\sum_{j=1}^n \left| f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_{I_j} f \right| \le 2\varepsilon.$

(iii) $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)|(x_j-x_{j-1})-\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{I_j}f\right|\right|\leq 2\varepsilon.$

Demonstração. *(i)* O resultado é imediato se $U(\dot{Q})=[a,b]$. Sejam, então, $J_1,\dots,J_m$ intervalos fechados de interior não vazio contidos em $[a,b]$ tais que $\{I_j:1\leq j\leq n\}\cup\{J_k:1\leq k\leq m\}$ é uma partição de $[a,b]$. Dado $\eta>0$, como f é integrável em J_k, existe um calibre ρ_k em J_k tal que se $\dot{Q}_k$ é uma partição ρ_k-fina de J_k, então $\left|S(f;\dot{Q}_k)-\int_{J_k}f\right|\leq\eta/m$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\rho_k(x)\leq\delta_\varepsilon(x)$ para todo $x\in J_k$ e todo $1\leq k\leq m$.

Consideremos, agora, a partição δ_ε-fina $\dot{P}=\dot{Q}\cup\dot{Q}_1\cup\cdots\cup\dot{Q}_m$ de $[a,b]$. Por hipótese, sabemos que

$$\left|S(f;\dot{P})-\int_a^b f\right|\leq\varepsilon.$$

Além disso, é claro que

$$S(f;\dot{P})=S(f;\dot{Q})+\sum_{k=1}^{m}S(f;\dot{Q}_k)\quad\text{e}\quad\int_a^b f=\int_{U(\dot{Q})}f+\sum_{k=1}^{m}\int_{J_k}f.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\left|S(f;\dot{Q})-\int_{U(\dot{Q})}f\right|&=\left|\left(S(f;\dot{P})-\int_a^b f\right)-\sum_{k=1}^{m}\left(S(f;\dot{Q}_k)-\int_{J_k}f\right)\right|\\&\leq\left|S(f;\dot{P})-\int_a^b f\right|+\sum_{k=1}^{m}\left|S(f;\dot{Q}_k)-\int_{J_k}f\right|\leq\varepsilon+\eta.\end{aligned}$$

Como $\eta>0$ é arbitrário, concluímos que $\left|S(f;\dot{Q})-\int_{U(\dot{Q})}f\right|\leq\varepsilon$.

(ii) Consideremos os conjuntos

$$I^+=\left\{1\leq j\leq n: f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\geq 0\right\}\quad\text{e}\quad I^-=\left\{1\leq j\leq n: f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f<0\right\}.$$

Se $I^+=\varnothing$ ou $I^-=\varnothing$, basta aplicar o item *(i)*. Caso contrário, as subpartições $\dot{Q}^+=\{(I_j,t_j):j\in I^+\}$ e $\dot{Q}^-=\{(I_j,t_j):j\in I^-\}$ são δ_ε-finas e, em virtude do item *(i)*, satisfazem

$$\sum_{j\in I^+}\left|f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\right|=\left|\sum_{j\in I^+}\left(f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\right)\right|\leq\varepsilon$$

e

$$\sum_{j\in I^-}\left|f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\right|=\left|\sum_{j\in I^-}\left(f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\right)\right|\leq\varepsilon.$$

Somando as duas desigualdades acima, obtemos o resultado.

(iii) Basta notar que

$$\left|\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)|(x_j-x_{j-1})-\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{I_j}f\right|\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\left||f(t_j)|(x_j-x_{j-1})-\left|\int_{I_j}f\right|\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\left|f(t_j)(x_j-x_{j-1})-\int_{I_j}f\right|\leq 2\varepsilon,$$

pelo item *(ii)*. □

Teorema 29. *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,b]$, então a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f$ é contínua em $[a,b]$.*

Demonstração. Dado $c \in [a,b)$, vamos mostrar que $\lim_{x\to c^+} F(x) = F(c)$. Em virtude do Corolário 19, podemos supor que $f(c) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre como na Definição 7. Podemos supor que $\delta_\varepsilon(c) \le b-c$. Se $c < x \le c+\delta_\varepsilon(c)$, então $\dot{Q} = \big\{\big([c,x],c\big)\big\}$ é uma subpartição δ_ε-fina de $[a,b]$ e, pelo Lema de Saks-Henstock,

$$|F(x)-F(c)| = \left|\int_c^x f\right| = \left|f(c)(x-c) - \int_c^x f\right| \le \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to c^+} F(x) = F(c)$. A demonstração para limites laterais à esquerda é análoga. □

Nosso próximo objetivo é provar que uma função dada por uma integral é derivável no complementar de um subconjunto de medida nula de seu domínio. Os ingredientes principais que vamos usar são a definição e o teorema a seguir.

Definição 30. Dado E um subconjunto de $\mathbb{R}$, uma *cobertura de Vitali de E* é uma coleção $\mathcal{V}$ de intervalos fechados de interior não vazio com a seguinte propriedade: para todo $x \in E$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um intervalo $I \in \mathcal{V}$ tal que $x \in I$ e $0 < \ell(I) \le \varepsilon$.

Teorema 31 (Teorema da Cobertura de Vitali)**.** *Sejam E um subconjunto de $[a,b]$ e $\mathcal{V}$ uma cobertura de Vitali de E. Então para todo $\varepsilon > 0$ existem intervalos dois a dois disjuntos $I_1,\dots,I_N \in \mathcal{V}$ e existe uma sequência de intervalos fechados $(J_k)_{k\ge N+1}$ tais que*

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k \quad e \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \ell(J_k) \le \varepsilon.$$

Em particular,

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \cup \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k.$$

Demonstração. Substituindo $\mathcal{V}$ pela coleção

$$\mathcal{V}' = \{I \cap [a-1,b+1] : I \in \mathcal{V} \text{ e } I \cap [a-1,b+1] \text{ tem interior não vazio}\},$$

se necessário, podemos supor que todos os intervalos de $\mathcal{V}$ estejam contidos em $[a-1,b+1]$.

Seja $I_1 \in \mathcal{V}$ arbitrário. Suponhamos escolhidos, para algum $n \ge 1$, intervalos dois a dois disjuntos $I_1,\dots,I_n \in \mathcal{V}$. Se $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, basta tomar $J_k = \varnothing$ para todo $k \ge n+1$. Caso contrário, sejam

$$\mathcal{V}_n = \left\{ I \in \mathcal{V} : I \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \lambda_n = \sup_{I\in\mathcal{V}_n} \ell(I),$$

e seja $I_{n+1} \in \mathcal{V}_n$ tal que $\ell(I) > \lambda_n/2$. Continuando este processo, ou obtemos $N \ge 1$ tal que $E \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ (e a demonstração está completa), ou obtemos uma sequência infinita $(I_k)_{k\ge1}$ de intervalos dois a dois disjuntos de $\mathcal{V}$.

Suponhamos que uma tal sequência tenha sido obtida. Como os intervalos $(I_k)_{k\ge1}$ são dois a dois disjuntos e estão contidos em $[a-1,b+1]$, sabemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le \ell([a-1,b+1]) = b-a+2.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \ge 1$ tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \ell(I_k) \le \frac{\varepsilon}{5}.$$

Seja $E_N = E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k$. Dado $x \in E_N$, como $\mathcal{V}$ é uma cobertura de Vitali de E, existe um intervalo $I \in \mathcal{V}$ tal que $x \in I$ e $I \cap \bigcup_{k=1}^{N} I_k = \varnothing$, isto é, $I \in \mathcal{V}_N$. Afirmamos que existe $k \geq N+1$ tal que $I \cap I_k \neq \varnothing$. Caso contrário, teríamos $I \in \mathcal{V}_k$ para todo $k \geq 1$ e, portanto,

$$0 < \ell(I) \leq \lambda_k < 2\ell(I_k) \longrightarrow 0,$$

um absurdo. Seja $k(x)$ o menor número natural tal que $I \cap I_{k(x)} \neq \varnothing$; como $I \in \mathcal{V}_{k(x)-1}$, temos

$$\ell(I) \leq \lambda_{k(x)-1} < 2\ell(I_{k(x)}).$$

Denotando por c_x o centro de $I_{k(x)}$, como $x \in I$ e $I \cap I_{k(x)} \neq \varnothing$, temos

$$|x - c_x| \leq \ell(I) + \frac{1}{2}\ell(I_{k(x)}) < \frac{5}{2}\ell(I_{k(x)}).$$

Logo, x pertence ao intervalo fechado de centro c_x e comprimento $5\ell(I_{k(x)})$.

Tomando, para cada $k \geq N+1$, o intervalo fechado J_k de centro igual ao de I_k e comprimento igual a $5\ell(I_k)$, concluímos que

$$E_N \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \varepsilon,$$

como queríamos. $\square$

Teorema 32. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ e seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$. Então existe um subconjunto de medida nula E de $[a,b]$ tal que F é derivável em x e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$.*

Demonstração. Seja E^+ o conjunto dos pontos $x \in [a,b)$ nos quais a derivada lateral à direita de F não existe ou existe mas é diferente de $f(x)$, e seja E^- o conjunto dos pontos $x \in (a,b]$ nos quais a derivada lateral à esquerda de F não existe ou existe mas é diferente de $f(x)$. Vamos mostrar que E^+ tem medida nula; um argumento análogo assegura que E^- também tem medida nula e, portanto, $E = E^+ \cup E^-$ tem medida nula, como desejado.

Dado $x \in [a,b)$, a derivada lateral à direita $F'_+(x)$ existe e é igual a $f(x)$ se, e somente se, para todo $\eta > 0$ existe $\rho > 0$ tal que se $v \in [a,b]$ e $x < v \leq x + \rho$, então

$$\left| \frac{F(v) - F(x)}{v - x} - f(x) \right| \leq \eta.$$

Assim, se $x \in E^+$, então existe $\eta(x) > 0$ tal que para todo $\rho > 0$ existe $v(x,\rho) \in [a,b]$ satisfazendo $x < v(x,\rho) \leq x + \rho$ e

$$\left| \frac{F(v(x,\rho)) - F(x)}{v(x,\rho) - x} - f(x) \right| > \eta(x) \implies |F(v(x,\rho)) - F(x) - f(x)(v(x,\rho) - x)| > \eta(x)(v(x,\rho) - x).$$

Fixemos $n \geq 1$ e seja $E_n^+ = \{x \in E^+ : \eta(x) \geq 1/n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ_ε um calibre em $[a,b]$ tal que

$$\dot{P} \text{ é uma partição } \delta_\varepsilon\text{-fina de } [a,b] \implies \left| S(f;\dot{P}) - \int_a^b f \right| \leq \frac{\varepsilon}{4n}. \tag{2}$$

Seja $\mathcal{V}_n = \{[x, v(x,\rho)] : x \in E_n^+ \text{ e } 0 < \rho \leq \delta_\varepsilon(x)\}$. Como $x \in [x, v(x,\rho)]$ e $\ell([x, v(x,\rho)]) \leq \rho$ para todo $x \in E_n^+$ e todo $\rho > 0$, $\mathcal{V}_n$ é uma cobertura de Vitali de E_n^+. Aplicando o Teorema da Cobertura de

Vitali, obtemos intervalos dois a dois disjuntos $I_1 = [x_1, v_1], \dots, I_N = [x_N, v_N] \in \mathcal{V}_n$ e uma sequência de intervalos fechados $(J_k)_{k \geq N+1}$ tais que

$$E_n^+ \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \cup \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k)(v_k - x_k) - \int_{x_k}^{v_k} f \right| &= \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k)(v_k - x_k) - (F(v_k) - F(x_k)) \right| \\ &> \sum_{k=1}^{N} \eta(x_k)(v_k - x_k) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} (v_k - x_k).\end{aligned}$$

Por outro lado, como $x_k < v_k \leq x_k + \delta_\varepsilon(x_k)$ para todo $1 \leq k \leq N$, $\dot{Q} = \{(I_k, x_k) : 1 \leq k \leq N\}$ é uma subpartição δ_ε-fina de $[a, b]$. Em virtude de (2) e do item *(ii)* do Lema de Saks-Henstock, temos

$$\sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k)(v_k - x_k) - \int_{x_k}^{v_k} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{N} (v_k - x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que cada E_n^+ tem medida nula e, portanto, $E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$ também tem medida nula. □

Podemos combinar os enunciados do Corolário 26 e dos Teoremas 29 e 32 no seguinte resultado.

Teorema 33 (2º Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b]$ e seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f$. Então temos:*

(i) F é contínua em $[a, b]$.

(ii) Existe um subconjunto de medida nula E de $[a, b]$ tal que F é derivável em x e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus E$.

(iii) Se f é contínua em $c \in [a, b]$, então F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

No enunciado do Teorema 21, exigimos que F seja derivável e que sua derivada coincida com f no complementar de um subconjunto *enumerável* de $[a, b]$. Por outro lado, sob as hipóteses do enunciado do Teorema 32, concluímos que F é derivável e sua derivada coincide com f no complementar de um subconjunto *de medida nula* de $[a, b]$. Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ tem medida nula, mas a recíproca não é verdadeira. Esta observação motiva as seguintes perguntas:

- O Teorema 21 permanece verdadeiro se substituirmos "enumerável" por "de medida nula"?
- O Teorema 32 permanece verdadeiro se substituirmos "de medida nula" por "enumerável"?

A resposta para estas duas perguntas é negativa, como veremos a seguir. Vamos recordar a construção do *conjunto de Cantor* e introduzir a *função de Cantor*.

Seja K_1 o conjunto obtido removendo, de $[0, 1]$, o intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, isto é,

$$K_1 = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right].$$

Seja K_2 o conjunto obtido dividindo cada intervalo de K_1 em 3 intervalos de mesmo comprimento e removendo os intervalos abertos centrais:

$$K_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right].$$

Repetindo este processo, cada conjunto K_n é construído como a reunião de 2^n intervalos fechados dois a dois disjuntos de comprimento $1/3^n$. Veja a figura abaixo.

O *conjunto de Cantor* é a intersecção $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Suas principais propriedades estão resumidas na proposição a seguir. Recordamos que um subconjunto E de $\mathbb{R}$ é *perfeito* se E é fechado e todo ponto de E é um ponto de acumulação de E.

Proposição 34. *O conjunto de Cantor K é perfeito, não enumerável e de medida nula.*

Demonstração. É claro que K é fechado, como intersecção de fechados. Dados $x \in K$ e $n \geq 1$, como $x \in K_n$, existe um intervalo fechado I de comprimento $1/3^n$ tal que $x \in I \subset K_n$. Se $y \neq x$ é um extremo de I, então $y \in K$ e $|x - y| \leq 1/3^n$. Isto prova que x é ponto de acumulação de K e, portanto, K é perfeito.

Suponhamos, por absurdo, que K seja enumerável e seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma enumeração de K. Seja I_1 o intervalo fechado de comprimento $1/3$ contido em K_1 que não contém x_1. Seja I_2 um intervalo fechado de comprimento $1/9$ contido em K_2 que não contém x_2, e seja I_3 um intervalo fechado de comprimento $1/27$ contido em K_3 que não contém x_3. Procedendo indutivamente, obtemos uma sequência de intervalos encaixantes $(I_n)_{n\geq 1}$ tais que $x_n \notin I_n$ e $\ell(I_n) = 1/3^n$ para todo $n \geq 1$. De acordo com o Princípio dos Intervalos Encaixantes, existe $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Notemos que $x_0 \in K$, pois cada I_n está contido em K_n, mas $x_0 \neq x_n$ para todo $n \geq 1$; um absurdo.

Finalmente, dado $n \geq 1$, existem 2^n intervalos fechados $J_1^n, \ldots, J_{2^n}^n$ de comprimento $1/3^n$ cuja reunião é K_n. Consequentemente,

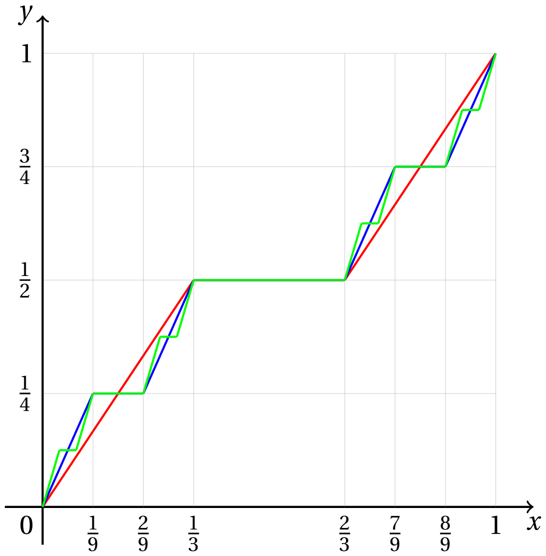
$$K \subset K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_k^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{2^n} \ell(J_k^n) = \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0.$$

Logo, K tem medida nula. □

Vamos usar o conjunto de Cantor para definir recursivamente uma sequência de funções $(f_n)_{n\geq 1}$. Seja $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ a função afim por partes que é constante igual a $1/2$ no intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e tal que $f_1(0) = 0$ e $f_1(1) = 1$. Analogamente, seja $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ a função afim por partes que é constante igual a $1/4$, $1/2$ e $3/4$ nos intervalos $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$, respectivamente, e tal que $f_2(0) = 0$ e $f_2(1) = 1$. Em geral, f_n é a função afim por partes que é constante igual a $k/2^n$ no k-ésimo intervalo removido na construção de K_n e tal que $f_n(0) = 0$ e $f_n(1) = 1$. Os gráficos de f_1, f_2 e f_3 estão esboçados abaixo (em vermelho, azul e verde, respectivamente).

Não é difícil verificar que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 1/2^{n+1}$ para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \geq 1$. Deste modo, a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente em $[0,1]$ para uma função $f : [0,1] \to [0,1]$, chamada de *função de Cantor*.

Proposição 35. *A função de Cantor é contínua e crescente em $[0,1]$, é derivável em $[0,1] \setminus K$ e sua derivada se anula em todos os pontos de $[0,1] \setminus K$.*



Demonstração. f é crescente e contínua, como limite uniforme de funções crescentes e contínuas. Dado $x \in [0,1] \setminus K$, existe $N \geq 1$ tal que $x \notin K_N$ e, como K_N é fechado, existe um intervalo aberto I tal que $x \in I \subset [0,1] \setminus K_N$. Se $m, n \geq N$, então f_m e f_n coincidem e são constantes em I. Consequentemente, f também é constante em I e, portanto, é derivável em x, com $f'(x) = 0$. $\square$

Podemos, agora, responder as duas perguntas formuladas acima.

Exemplo 36. A função de Cantor $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua em $[0,1]$, derivável em $[0,1] \setminus K$ e satisfaz $f'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1] \setminus K$. No entanto,

$$\int_0^1 f' = 0 \neq 1 = f(1) - f(0).$$

Logo, não podemos substituir "enumerável" por "de medida nula" no enunciado do Teorema 21.

Exemplo 37. Seja $g : [0,1] \to \{0,1\}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$$

Como K tem medida nula, a Proposição 18 assegura que g é integrável em $[0,1]$ e que $\int_0^x g = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Em outras palavras, a função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_0^x g$ é identicamente nula. Em particular, o conjunto $\{x \in [0,1] : F'(x) \neq g(x)\} = \{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\} = K$ é não enumerável. Logo, não podemos substituir "de medida nula" por "enumerável" no enunciado do Teorema 32.

Convém observar também que não existe nenhuma função contínua $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ cuja derivada coincide com g no complementar de um subconjunto enumerável E de $[0,1]$. De fato, se G é uma tal função, em virtude do 1º Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$G(x) - G(0) = \int_0^x g = 0 \implies G(x) = G(0)$$

para todo $x \in [0,1]$. Portanto, G é constante e sua derivada se anula em $[0,1]$. Por outro lado, como K é não enumerável, podemos tomar $x_0 \in K \setminus E$ e concluir que $G'(x_0) = g(x_0) = 1$; um absurdo.

5 O Teorema de Hake

Toda função Riemann-integrável em um intervalo $[a,b]$ é limitada; para lidar com integrandos ilimitados, é preciso estender o conceito de integral, introduzindo integrais impróprias.

E quanto à integral de Kurzweil-Henstock? Já vimos exemplos de funções Kurzweil-Henstock integráveis que não são limitadas. Precisamos introduzir "integrais impróprias" também neste caso?

O principal teorema desta seção, provado por Heinrich Hake em 1921, garante que a resposta é negativa; toda função cuja "integral imprópria" é convergente já é, na realidade, integrável. Por simplicidade, vamos enunciar e provar o Teorema de Hake apenas para limites laterais à esquerda.

Teorema 38 (Teorema de Hake)**.** *Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é integrável em $[a,c]$ para todo $c\in(a,b)$ e o limite $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f$ existe e é um número real. Neste caso, temos $\int_a^b f=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f$.*

Demonstração. Se f é integrável em $[a,b]$, o Teorema 29 assegura que a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_a^x f$ é contínua. Em particular, $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f=\lim_{c\to b^-}F(c)=F(b)=\int_a^b f$.

Reciprocamente, suponhamos que f seja integrável em $[a,c]$ para todo $c\in(a,b)$ e que

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f=A\in\mathbb{R}.$$

Em virtude do Corolário 19, podemos supor que $f(b)=0$. Seja $(c_k)_{k\geq 0}$ uma sequência estritamente crescente de números reais tais que $c_0=a$ e $\lim_{k\to\infty}c_k=b$. Dado $\varepsilon>0$, seja $N\geq 1$ tal que

$$c_N\leq c<b\implies\left|\int_a^c f-A\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $k\geq 1$, seja δ_k um calibre em $[c_{k-1},c_k]$ tal que

$$\dot{P}_k\text{ é uma partição }\delta_k\text{-fina de }[c_{k-1},c_k]\implies\left|S(f;\dot{P}_k)-\int_{c_{k-1}}^{c_k}f\right|\leq\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.\tag{3}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que:

(i) $\delta_1(c_0)\leq\dfrac{c_1-c_0}{2}$.

(ii) $\delta_{k+1}(c_k)\leq\min\left(\dfrac{c_k-c_{k-1}}{2},\dfrac{c_{k+1}-c_k}{2}\right)$ para todo $k\geq 1$.

(iii) $\delta_k(x)\leq\min\left(\dfrac{x-c_{k-1}}{2},\dfrac{c_k-x}{2}\right)$ para todo $c_{k-1}<x<c_k$ e todo $k\geq 1$.

Consideremos o calibre δ em $[a,b]$ dado por

$$\delta(x)=\begin{cases}\delta_k(x), & \text{se } c_{k-1}\leq x<c_k \text{ para algum } k\geq 1,\\ b-c_N, & \text{se } x=b.\end{cases}$$

Seja $\dot{P}=\{(I_j,t_j):1\leq j\leq n\}$ uma partição δ-fina de $[a,b]$. Podemos supor que cada t_j é extremo dos intervalos de $\dot{P}$ que o contêm. Afirmamos que b é o rótulo do intervalo $I_n=[x_{n-1},b]$. Caso contrário, existe um único $k\geq 1$ tal que $t_n\in[c_{k-1},c_k)$. Então $c_k\in[x_{n-1},b]$ e $0<c_k-t_n\leq\delta_k(t_n)$, o que implica, pela construção de δ_k, que $t_n=c_{k-1}$. Logo,

$$0<c_k-c_{k-1}\leq\delta_k(c_{k-1})\leq\frac{c_k-c_{k-1}}{2},$$

um absurdo. Em particular, notemos que $c_N = b - \delta(b) \le x_{n-1}$ e, portanto,

$$\left| \int_a^{x_{n-1}} f - A \right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja m o menor número natural tal que $x_{n-1} \le c_m$. Dado $0 \le k \le m-1$, afirmamos que c_k é o rótulo de cada intervalo de $\dot{P}$ que o contém. De fato, se $c_k \in [x_{j-1}, x_j]$, então $|c_k - t_j| \le \delta(t_j)$ e

$$x_{j-1} \le c_k < x_{n-1} \implies j \le n-1 \implies t_j \le t_{n-1} < b.$$

Logo, existe um único $i \ge 1$ tal que $t_j \in [c_{i-1}, c_i)$. Se $i-1 > k$, então $i-2 \ge k$ e

$$c_k < c_{i-1} \le t_j \implies 0 \le t_j - c_{i-1} < t_j - c_k \le \delta_i(t_j),$$

o que implica, pela construção de δ_i, que $t_j = c_{i-1}$. Logo,

$$0 < c_{i-1} - c_k \le \delta_i(c_{i-1}) \le \frac{c_{i-1} - c_{i-2}}{2} \le \frac{c_{i-1} - c_k}{2},$$

um absurdo. Analogamente, se $i-1 < k$, então $i \le k$ e

$$t_j < c_i \le c_k \implies 0 < c_i - t_j \le c_k - t_j \le \delta_i(t_j),$$

o que implica novamente que $t_j = c_{i-1}$. Logo,

$$0 < c_i - c_{i-1} \le \delta_i(c_{i-1}) \le \frac{c_i - c_{i-1}}{2} \le \frac{c_k - c_{i-1}}{2},$$

que também é um absurdo. Isto prova que $i = k+1$, de modo que $t_j \in [c_k, c_{k+1})$ e $0 \le t_j - c_k \le \delta_{k+1}(t_j)$. A construção de δ_{k+1} garante que $t_j = c_k$, provando a afirmação. Em particular, c_k é extremo de dois intervalos consecutivos de $\dot{P}$ para cada $1 \le k \le m-1$.

Para cada $1 \le k \le m-1$, consideremos a partição $\dot{Q}_k = \left\{ \left(I_j, t_j\right) \in \dot{P} : I_j \subset [c_{k-1}, c_k] \right\}$ de $[c_{k-1}, c_k]$. Sejam também $\dot{Q}_m = \left\{ \left(I_j, t_j\right) \in \dot{P} : I_j \subset [c_{m-1}, x_{n-1}] \right\}$ e $\dot{Q}_0 = \left\{ \left([x_{n-1}, b], b\right) \right\}$. Como $\dot{Q}_k$ é uma partição δ_k-fina de $[c_{k-1}, c_k]$ para todo $1 \le k \le m-1$, decorre de (3) que

$$\left| S(f; \dot{Q}_k) - \int_{c_{k-1}}^{c_k} f \right| \le \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Como $\dot{Q}_m$ é uma subpartição δ_m-fina de $[c_{n-1}, c_m]$, decorre de (3) e do Lema de Saks-Henstock que

$$\left| S(f; \dot{Q}_m) - \int_{c_{m-1}}^{x_{n-1}} f \right| \le \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Finalmente, como

$$S(f; \dot{Q}_0) = f(b)(b - x_{n-1}) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{P} = \dot{Q}_1 \cup \cdots \cup \dot{Q}_m \cup \dot{Q}_0,$$

concluímos que

$$|S(f; \dot{P}) - A| \le \sum_{k=1}^{m-1} \left| S(f; \dot{Q}_k) - \int_{c_{k-1}}^{c_k} f \right| + \left| S(f; \dot{Q}_m) - \int_{c_{m-1}}^{x_{n-1}} f \right| + \left| \int_a^{x_{n-1}} f - A \right| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = A$. □

Em particular, decorre do Teorema de Hake que a integral de Kurzweil-Henstock engloba todas as integrais de Riemann impróprias convergentes (em intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$). Além disso, este teorema é útil, na prática, como ferramenta para calcular o valor exato de uma integral.

Exemplo 39. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer de números reais e seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}2^k a_k, & \text{se } c_{k-1}\leq x<c_k \text{ para algum } k\geq 1,\\ 0, & \text{se } x=1,\end{cases}$$

onde $c_k=1-\frac{1}{2^k}$. Afirmamos que f é integrável em $[0,1]$ se, e somente se, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ converge; neste caso, temos $\int_0^1 f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. De fato, seja $a_0=0$ e seja $F:[0,1)\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k+2^m a_m(x-c_{m-1})$$

para todo $x\in[c_{m-1},c_m)$ e todo $m\geq 1$. Como F é contínua em $[0,1)$, derivável em $[0,1)\setminus\{c_k:k\geq 0\}$ e sua derivada coincide com f neste conjunto, pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo f é integrável em $[0,c]$ e $\int_0^c f=F(c)-F(0)=F(c)$ para todo $c\in[0,1)$. Em particular, para cada $m\geq 1$, temos

$$\int_0^{c_m} f=F(c_m)=\sum_{k=1}^{m}a_k.$$

Se a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ diverge, então o limite $\lim\limits_{c\to 1^-}\int_0^c f$ não existe e, pelo Teorema de Hake, f não é integrável em $[0,1]$. Por outro lado, se a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ converge, então $\lim\limits_{c\to 1^-}\int_0^c f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, pois $F(c)$ pertence ao intervalo de extremos $\sum\limits_{k=0}^{m-1}a_k$ e $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k$ para todo $c\in[c_{m-1},c_m)$, e o Teorema de Hake garante que f é integrável em $[0,1]$.

Exemplo 40. Em particular, tomando $a_k=(-1)^{k+1}/k$ no exemplo anterior, a função f assim obtida é integrável em $[0,1]$ e verifica $\int_0^1 f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln 2$, mas $|f|$ não é integrável em $[0,1]$.

6 Considerações Finais

Na década de 1960, Edward McShane introduziu outra noção de integral fazendo uma pequena modificação na definição de Kurzweil-Henstock.

Definição 41. Uma *partição rotulada livre* do intervalo $[a,b]$ é uma coleção $\dot{P}=\{(I_j,t_j):1\leq j\leq n\}$, onde $P=\{I_j:1\leq j\leq n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $t_1,\ldots,t_n\in[a,b]$.

Notemos que, em uma partição rotulada livre, não estamos exigindo que o rótulo t_j do intervalo I_j seja um elemento de I_j.

Definição 42. Seja $\dot{P}=\{(I_j,t_j):1\leq j\leq n\}$ uma partição rotulada livre de $[a,b]$. Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função, a *soma de Riemann de f com respeito a $\dot{P}$* é o número real

$$S(f;\dot{P})=\sum_{j=1}^{n}f(t_j)(x_j-x_{j-1}).$$

Se δ é um calibre em $[a,b]$, dizemos que $\dot{P}$ é *δ-fina* se $I_j\subset[t_j-\delta(t_j),t_j+\delta(t_j)]$ para todo $1\leq j\leq n$.

Definição 43. Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é *McShane-integrável em* $[a,b]$ se existe um número real A com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe um calibre δ_ε em $[a,b]$ tal que se $\dot{P}$ é uma partição rotulada livre δ_ε-fina de $[a,b]$, então $|S(f;\dot{P}) - A| \le \varepsilon$. Neste caso, dizemos que A é a *integral de McShane de* f *em* $[a,b]$.

É claro que toda função McShane-integrável também é Kurzweil-Henstock-integrável, com integrais iguais. Por outro lado, como, para um dado calibre δ, existem mais partições livres δ-finas do que partições não livres δ-finas, é "mais fácil" uma função ser Kurzweil-Henstock-integrável do que McShane-integrável. Surpreendentemente, é possível mostrar (veja [3, Teoremas 10.12 e 10.13]) que as integrais de McShane e de Lebesgue coincidem!

Referências

[1] R. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 32, American Math. Soc., Providence (2001).

[2] R. Bartle, D. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York (2000).

[3] R. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 4, American Math. Soc., Providence (1994).